

Risoluzione
Matematica finanziaria – 08 febbraio 2011

Esercizio 1

Viene emessa un'opzione call con scadenza a sei mesi ($t = 0,5$) e strike price $K = 5,3$. Il sottostante dell'opzione è un'azione il cui valore in $t = 0$ è pari a 5. La dinamica binomiale del titolo azionario prevede movimenti trimestrali di rialzo/ribasso la cui entità è pari rispettivamente a $u = 1,3$ e $d = 0,85$. Il tasso risk free annuale è $i = 4,887\%$.

- a) Determinare il prezzo della call.
- b) Determinare la strategia di copertura (hedging) che l'emittente deve porre in essere, a ogni epoca (epoca *zero* e a tre mesi) e in ogni scenario, per replicare il derivato.

Risoluzione.

Il tasso trimestrale equivalente è $i_{1/4} = 1,04887^{1/4} - 1 = 0,012$. Di conseguenza, la probabilità risk neutral relativa al periodo vale

$$\pi = \frac{1 + i_{1/4} - d}{u - d} = 0,36 \rightarrow 36\%$$
$$1 - \pi = 64\%$$

Il sottostante assume i valori seguenti:

$$\begin{array}{lll} A_u = 6,50 & A_d = 4,25 & \\ A_{uu} = 8,45 & A_{ud} = 5,525 & A_{dd} = 3,6125 \end{array}$$

Possiamo dedurre i pay off nei tre nodi all'epoca $t = 0,5$:

$$C_{uu} = 3,15 \quad C_{ud} = 0,225 \quad C_{dd} = 0$$

Il prezzo della call nei due nodi all'epoca $t = 0,25$ vale:

$$C_u = \frac{C_{uu} \cdot \pi + C_{ud} \cdot (1 - \pi)}{1 + i_{1/4}} = 1,2628$$
$$C_d = \frac{C_{ud} \cdot \pi + C_{dd} \cdot (1 - \pi)}{1 + i_{1/4}} = 0,0800$$

mentre il suo prezzo all'epoca $t = 0$ è:

$$C = \frac{C_{uu} \cdot \pi^2 + 2C_{ud} \cdot \pi \cdot (1 - \pi) + C_{dd} \cdot (1 - \pi)^2}{(1 + i_{1/4})^2} = 0,4999$$

La strategia di hedging consiste nella determinazione di un portafoglio (composto di azioni e di titoli risk free) che replichi il derivato in ogni nodo dell'albero binomiale. Le incognite del nostro problema saranno perciò le due quote di composizione.

Nel nodo "up" dell'epoca $t = 0,25$ avremo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \alpha \cdot A_{uu} + \beta \cdot (1 + i_{1/4})^2 = C_{uu} \\ \alpha \cdot A_{ud} + \beta \cdot (1 + i_{1/4})^2 = C_{ud} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1,0000 \\ \beta = -5,1751 \end{cases}$$

Nel nodo “down” dell’epoca $t = 0,25$ avremo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \alpha \cdot A_{ud} + \beta \cdot (1 + i_{1/4})^2 = C_{ud} \\ \alpha \cdot A_{dd} + \beta \cdot (1 + i_{1/4})^2 = C_{dd} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0,1176 \\ \beta = -0,4150 \end{cases}$$

Infine, nel nodo dell’epoca $t = 0$ avremo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \alpha \cdot A_u + \beta \cdot (1 + i_{1/4}) = C_u \\ \alpha \cdot A_d + \beta \cdot (1 + i_{1/4}) = C_d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0,5257 \\ \beta = -2,1286 \end{cases}$$

Esercizio 2.

Un soggetto prende a prestito 35.000 euro per attivare un’impresa e aggiunge Euro 45.000 di capitale proprio. Ritiene che i redditi che produrrà saranno pari a 18.000 euro l’anno per cinque anni.

Considerando che il prestito è rimborsato in ammortamento francese al 6% calcolare il TIR dell’operazione complessiva.

Calcolare a quale tasso i' avrebbe dovuto prendere a prestito le somme in oggetto se avesse desiderato un TIR maggiore dell’1% di quello precedentemente individuato.

Risoluzione.

Il piano d’ammortamento relativo al prestito di 35.000 euro è dato da:

| h | QC | QI | R | DR |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| 0 | | | | 35 000.00 |
| 1 | 6 208.87 | 2 100.00 | 8 308.87 | 28 791.13 |
| 2 | 6 581.41 | 1 727.47 | 8 308.87 | 22 209.72 |
| 3 | 6 976.29 | 1 332.58 | 8 308.87 | 15 233.43 |
| 4 | 7 394.87 | 914.01 | 8 308.87 | 7 838.56 |
| 5 | 7 838.56 | 470.31 | 8 308.87 | 0.00 |

Abbiamo perciò due operazioni finanziarie.

Un finanziamento con scadenziario:

$$(+35.000; -8.308,87; \dots; -8.308,87) / (0;1;2;3;4;5)$$

Un investimento con scadenziario:

$$(-80.000; +18.000; \dots; +18.000) / (0;1;2;3;4;5)$$

Il saldo netto delle due operazioni è dato da:

$$(-45.000; +9.691,13; \dots; +9.691,13) / (0;1;2;3;4;5)$$

Il TIR dell’operazione complessiva si ottiene risolvendo l’equazione di equilibrio finanziario:

$$45.000 = 9.691,13 \cdot a_{\overline{5}|TIR}$$

Si ottiene per interpolazione $TIR \approx 2,52\%$.

Ipotizziamo ora che il TIR dell'operazione complessiva sia pari al 3,52% mentre la rata del finanziamento sia incognita.

Avremo perciò:

$$45.000 = (18.000 - R) \cdot a_{\overline{5}|3,52}$$

$$\Rightarrow R = 18.000 - \frac{45.000}{a_{\overline{5}|3,52}} = 8.028,26$$

Il nuovo tasso i' dovrà quindi soddisfare la condizione

$$\frac{35.000}{a_{\overline{5}|i'}} = 8.028,26 \rightarrow a_{\overline{5}|i'} = \frac{35.000}{8.028,26} = 4,3596$$

Si ottiene per interpolazione $i' \approx 4,75\%$.

Esercizio 3.

Una banca concede un mutuo semestrale per la somma di Euro 20.000, durata 2 anni e rata costante posticipata pari a Euro 5.500. Siano $i(0; 0,5) = 2\%$, $i(0; 1) = 2,05\%$, $i(0; 1,5) = 2,1\%$ e $i(0; 2) = 2,2\%$ (il tempo è espresso in anni) i tassi a pronti in vigore sul mercato al momento della concessione del mutuo. Calcolare il valore di non arbitraggio in $t = 0$ del flusso delle rate. Mostrare la strategia di arbitraggio che la banca può realizzare per ottenere un guadagno certo in $t = 0$.

Risoluzione.

Il valore di non arbitraggio si ottiene semplicemente dalla relazione di coerenza, ossia:

$$V = \frac{5.500}{v(0; 0,5)} + \frac{5.500}{v(0; 1)} + \frac{5.500}{v(0; 1,5)} + \frac{5.500}{v(0; 2)} = \frac{5.500}{1,02^{0,5}} + \frac{5.500}{1,0205^1} + \frac{5.500}{1,021^{1,5}} + \frac{5.500}{1,022^2} = 21.432,27$$

Gli importi incassati pari a 5.500 possono essere utilizzati in altrettante operazioni di finanziamento.

Il saldo netto in $t = 0$ tenendo conto dell'investimento iniziale è pari a

$$21.432,27 - 20.000 = 1.432,27.$$

Possiamo visualizzare queste operazioni nella seguente tabella:

| arbitraggio | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
|--------------------------|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| investimento | -20 000 | 5 500 | 5 500 | 5 500 | 5 500 |
| indebitarsi a $i(0,0.5)$ | 5 445.81 | -5 500 | | | |
| indebitarsi a $i(0,1)$ | 5 389.51 | | -5 500 | | |
| indebitarsi a $i(0,1.5)$ | 5 331.19 | | | -5 500 | |
| indebitarsi a $i(0,2)$ | 5 265.76 | | | | -5 500 |
| Saldo | 1 432.27 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |

Esercizio 4.

Compro 10 zero coupon bond ad un anno che costano 98,53 e rimborsano 100 a scadenza nonché 30 obbligazioni biennali che pagano cedole annue al 3% e rimborsano il capitale a 100. Sapendo che il mio TIR complessivo è il 3,5% calcolare il prezzo delle obbligazioni.

Calcolare quale sarebbe stato il TIR complessivo se il prezzo delle obbligazioni fosse stato pari a 100.

Risoluzione.

Lo scadenziario del nostro PTF è:

$$(-985,3 - 30P; 1.090; 3.090) / (0; 1; 2)$$

Sapendo che il TIR complessivo è il 3,5%, avremo la relazione

$$\begin{aligned} 985,3 + 30P &= 1.090 \cdot 1,035^{-1} + 3.090 \cdot 1,035^{-2} \\ \Rightarrow P &= \frac{1.090 \cdot 1,035^{-1} + 3.090 \cdot 1,035^{-2} - 985,3}{30} = 98,4129 \end{aligned}$$

Nell'ipotesi in cui $P = 100$, lo scadenziario del PTF è

$$(-3.985,3; 1.090; 3.090) / (0; 1; 2)$$

Il TIR si ottiene risolvendo l'equazione

$$\begin{aligned} 3.090 \cdot v^2 + 1.090 \cdot v - 3.985,3 &= 0 \\ v &= \frac{-545 \pm 3.551,28}{3090} = 0,9729 = (1 + TIR)^{-1} \rightarrow TIR = 2,785\% \end{aligned}$$

Nella formula risolutiva abbiamo tralasciato la soluzione negativa.